1.01.01 - Matemática / Álgebra

DA SIMPLICIDADE DO M_{24}

Caio Eduardo Candido[1], Pietro Speziali[2], Herivelto Martins Borges Filho[3]
1. Estudante do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP)
2. Pós-Doutorando do ICMC-USP/Orientador
3. Professor do ICMC-USP/Orientador

Resumo

Neste trabalho, temos como objetivo revisar os conceitos básicos de teoria de grupos como ações de grupos transitivos, primitivos e teoria de códigos, com a finalidade de demonstrar a simplicidade de um grupo esporádico, o grupo de Mathieu M_{24}.

Palavras-chave: Grupos de Mathieu; Grupos Primitivos; Computação aplicada à Grupos.

Apoio financeiro: FAPESP.

Trabalho selecionado para a JNIC: ICMC-USP.

Introdução

Seja G um grupo. Dizemos que G é simples se os únicos subgrupos normais existentes são os triviais. A relevância e o interesse do estudo dos grupos finitos simples é devido, além de suas propriedades, ao Teorema de Jordan-Hölder [3, Teorema 2.27]. Isto porque, segundo o teorema, os grupos simples podem ser vistos como blocos primordiais na construção de grupos.

Por este motivo, a classificação de grupos finitos simples foi considerada um dos maiores desafios e, posteriormente, resultado da Matemática do século XX. A prova deste Teorema de classificação (declarada e encerrada em 2004) consiste de dezenas de milhares de páginas.

Segundo o Teorema, temos 4 classes de grupos finitos simples. Nosso foco será o grupo de Mathieu M_{24}, pertencente à classe dos grupos esporádicos, assim chamados por serem excepcionais e não seguirem um padrão sistemático.

Dado um grupo finito G, mostrar a sua simplicidade pode ser tarefa não trivial. Neste trabalho, mostramos a simplicidade do grupo de Mathieu M_{24} através de teorias matemáticas e algoritmos computacionais. Construímos o grupo M_{24} como automorfismo do código de Golay. A prova é feita por meio de ações transitivas, primitivas e do Lema de Iwasawa.

Metodologia

Construímos o grupo de Mathieu M_{24} por automorfismos de códigos utilizando como referência principal [2]. Inicialmente, estudamos ações de grupos e suas propriedades, dando ênfase especial para ações primitivas e multi-transitivas. Estudamos então o código Hexacode. Com ele, geramos o código de Golay e definimos o grupo M_{24} como o automorfismo do código de Golay. Em seguida, demonstramos o Lema de Iwasawa e aplicamos os conhecimentos de ações de grupos no automorfismo do código de Golay para concluir que o grupo é simples. A primitividade do grupo M_{24}, propriedade mais difícil a ser provada, é demonstrada utilizando sistema de blocos e algoritmos computacionais de grafos.

Resultados e Discussão

(Lema de Iwasawa) Seja G um grupo finito perfeito. Se G age fielmente em X tal que existe um estabilizador H com um subgrupo normal abeliano A cujos conjugados geram G. Então G é simples. O grupo M_{24} satisfaz todas as condições do Lema de Iwasawa. A demonstração dos resultados feita pelos algoritmos computacionais são omitidos em todas as referências citadas.

Conclusões

Este trabalho demonstra duas qualidades importantes na Pesquisa para um aluno de Graduação em Matemática. A primeira, a importância do domínio de ferramentas básicas em uma área do conhecimento. E a segunda, como diferentes áreas podem ajudar na resolução de um determinado problema. Graças a ambas, foi possível demonstrar a simplicidade de um grupo esporádico da importante classificação de grupos finitos simples.

Referências bibliográficas

[1] B. Mortimer, J. D. Dixon, *Permutation Groups*, Springer-Verlag, New York, (1996), ix + 347 pp.

[2] R. A. Wilson, *The Finite Simple Groups*, Springer-Verlag, London, (2009), v + 298 pp.

[3] A. Machi, *An Introduction to Ideas and Methods of Theory of Groups*, Springer-Verlag, Milan, (2012), viii + 377 pp.

[4] Miranda C. N. Cheng, K3 Surfaces, N=4 Dyons, and the Mathieu Group M_{24}, *Commun. Num. Theor. Phys.4*, (2010), **623**, 156-177.

[5] Thomas H. Cormen, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, (2001), xxxv + 1292 pp.